

Triângulos Numéricos

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 & 0 \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 0 \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \end{pmatrix}$$

⋮

- 1 O que são Triângulos Numéricos?
- 2 Algoritmo de Construção dos Triângulos Numéricos
- 3 Triângulos Numéricos
 - 1 Triângulo de Pascal
 - 2 Triângulo Gama
 - 3 Triângulo de Pascal com Translação $C_1 \rightarrow C_0$
 - 4 Triângulo de Pascal com Translação $C_2 \rightarrow C_0$
 - 5 Triângulo de Manso: Regras de Construção
 - 6 Triângulo de Pascal com Fator $\frac{1}{2}$ para $a_{ij} \neq 1$

1 O que são Triângulos Numéricos?

Triângulos numéricos são matrizes triangulares inferiores; toda entrada a_{ij} com $j > i$ implica em $a_{ij} = 0$. Triângulos numéricos têm relevantes aplicações em Matemática e interessantes propriedades. A construção dos triângulos numéricos normalmente se dá por uma regra bem definida. Descreveremos seis triângulos numéricos e um algoritmo de construção não muito usual. Para os triângulos considerados, discutiremos aplicações na resolução de problemas e propriedades.

2 Algoritmo de Construção dos Triângulos Numéricos

1 Construção do Vetor Base V_b

$$V_b = [b_{i,0}]$$

2 Regra de Construção: Por Recorrência

$$a_{ii} = 1$$

$$a_{ij} = a_{(i-1,j)} \times b_{(i-1,0)} + a_{(i-1,j-1)}$$

Ex:

$$V_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} a_{00} &= 1 \\ a_{1,0} &= a_{0,0} \times b_{0,0} + a_{0,-1} = 1 \times 2 + 0 = 2 & a_{1,1} &= a_{ii} = 1 \\ a_{2,0} &= a_{1,0} \times b_{1,0} + a_{1,-1} = 8 \times 5 + 0 = 10 \\ a_{2,1} &= a_{1,1} \times b_{1,0} + a_{1,0} = 1 \times 5 + 2 = 7 \\ a_{1,1} &= a_{ii} = 1 & a_{2,2} &= a_{ii} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & 0 & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 0 \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Triângulos Numéricos

1 Triângulo de Pascal (Yang Hui, Khayyam, Tartaglia — Triângulo Aritmético)

1 Construção pelos Números Binomiais

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

Ex: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 6$

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 & 0 \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 0 \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \end{pmatrix}$$

⋮

Cada valor foi calculado a partir do seu respectivo número binomial.

Ex 15: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 15$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

2 Construção por Recorrência a partir da Regra de Stifel

Regra de Stifel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$a_{00} = a_{ii} = 1 \quad a_{ij} = a_{(i-1,j)} + a_{(i-1,j-1)}, \quad \forall a_{ij} \neq 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{3} & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

Ex: $a_{4,2} = a_{3,2} + a_{3,1} = 3 + 3 = 6$

3 Construção por Recorrência pelo Algoritmo do Vetor Base

$$V_b = 1 \quad \forall b_{i,0}, \quad a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = a_{(i-1,j)} \times b_{(i-1,0)} + a_{(i-1,j-1)}, \quad \forall i \neq j$$

$$V_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{4} & \boxed{6} & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & \boxed{10} & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex: $a_{5,2} = a_{4,2} \times b_{4,0} + a_{3,3} = 6 \times 1 + 4 = 10$

4 Propriedades do Triângulo de Pascal

1

$$\sum_{j=0}^i a_{ij} \cdot 10^{i-j} = 11^i \quad \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \cdot 10^{i-j} = 11^i$$

Ex $i = 3$: $a_{3,0} \cdot 10^3 + a_{3,1} \cdot 10^2 + a_{3,2} \cdot 10^1 + a_{3,3} = 11^3$

$$1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1331 = 11^3$$

Ex $i = 6$:

$$\binom{6}{0} \cdot 10^6 + \binom{6}{1} \cdot 10^5 + \binom{6}{2} \cdot 10^4 + \binom{6}{3} \cdot 10^3 + \binom{6}{4} \cdot 10^2 + \binom{6}{5} \cdot 10 + \binom{6}{6} = 11^6$$

$$= 1 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 15 \times 10^4 + 20 \times 10^3 + 15 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1 = 1\,771\,561 = 11^6$$

2

$$\sum_{j=0}^i a_{ij} = 2^i \quad \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} = 2^i$$

Ex $i = 4$: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

3 A soma dos termos de cada diagonal secundária D_i em $a_{i,0}$ formam a sequência de Fibonacci

$$D_1 = 1 = F_1, \quad D_4 = 1 + 2 = F_4$$

$$D_2 = 1 = F_2, \quad D_5 = 1 + 3 + 1 = F_5$$

$$D_3 = 1 + 1 = F_3, \quad D_6 = 1 + 4 + 3 = F_6$$

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

4 A terceira diagonal principal D_3 em $a_{2,0}$ formam a sequência dos números triangulares

$$D_3 : a_{2,0} = 1 = T_1, \quad a_{3,1} = 3 = T_2, \quad a_{4,2} = 6 = T_3, \dots$$

$$T_n = 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots = \frac{n(n+1)}{2}$$

5 Simetria

$$\binom{i}{j} = \binom{i}{i-j}$$

Ex: $a_{5,1} = a_{5,4} = 5$; $a_{5,2} = a_{5,3} = 10$

6 Regra de Stifel

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad a_{ij} = a_{(i-1,j)} + a_{(i-1,j-1)}$$

Ex: $a_{6,2} = a_{5,2} + a_{5,1} = 10 + 5 = 15$

5 O que resolve o Triângulo de Pascal? Cada entrada do Triângulo de Pascal é um coeficiente do polinômio que representa a expansão binomial de Newton $(a+b)^i$:

$$(a+b)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a^{i-j} b^j$$

Fixando i , $\binom{i}{j}$ são os termos do Triângulo de Pascal. Assim temos:

$$(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b$$

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} ab^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} ab^5 + \binom{6}{6} b^6$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

⋮

Para $(a - b)^i = \sum_{j=0}^i (-1)^j a^{i-j} b^j$, teremos os mesmos termos alternando os sinais:

$$(a - b)^0 = 1$$

$$(a - b)^1 = a - b$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5 b + 15a^4 b^2 - 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 - 6ab^5 + b^6$$

⋮

$$(a - b)^i = (a + (-b))^i$$

Teorema Multinomial — Expansão para Somas com Mais de Dois Termos

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

onde $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Coeficiente Multinomial:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

Número de Termos: $\binom{m+n-1}{n-1}$

Ex: $(a+b+c)^3$. $n=3$, $m=3$.

Número de Termos: $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$$\boxed{1} \quad \binom{3}{3 \ 0 \ 0} = \frac{3!}{3!0!0!} = 1 \cdot a^3 b^0 c^0$$

$$\boxed{2} \quad \binom{3}{0 \ 3 \ 0} = \frac{3!}{0!3!0!} = 1 \cdot a^0 b^3 c^0$$

$$\boxed{3} \quad \binom{3}{0 \ 0 \ 3} = \frac{3!}{0!0!3!} = 1 \cdot a^0 b^0 c^3$$

$$\boxed{4} \quad \binom{3}{2 \ 1 \ 0} = \frac{3!}{2!1!0!} = 3 \cdot a^2 b^1 c^0$$

$$\boxed{5} \quad \binom{3}{2 \ 0 \ 1} = \frac{3!}{2!0!1!} = 3 a^2 b^0 c^1$$

$$\boxed{6} \quad \binom{3}{1 \ 2 \ 0} = \frac{3!}{1!2!0!} = 3 a^1 b^2 c^0$$

$$\boxed{7} \quad \binom{3}{0 \ 2 \ 1} = \frac{3!}{0!2!1!} = 3 a^0 b^2 c^1$$

$$\boxed{8} \quad \binom{3}{1 \ 0 \ 2} = \frac{3!}{1!0!2!} = 3 a^1 b^0 c^2$$

$$\boxed{9} \quad \binom{3}{0 \ 1 \ 2} = \frac{3!}{0!1!2!} = 3 a^0 b^1 c^2$$

$$\boxed{10} \quad \binom{3}{1 \ 1 \ 1} = \frac{3!}{1!1!1!} = 6 a^1 b^1 c^1$$

Então,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3bc^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 6abc$$

2 Triângulo Gama: Γ

1 Algoritmo de Construção via Vetor Base V_b

$$V_b = (i + 1) \forall b_{i,0}, \quad a_{ii} = 1$$

$$a_{ij} = a_{(i-1,j)} \times b_{(i-1,0)} + a_{(i-1,j-1)}$$

$$V_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 120 & 274 & 225 & \boxed{85} & 15 & 1 & 0 \\ 720 & 1764 & 1624 & 735 & 175 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

\vdots

Ex: $a_{5,3} = a_{4,3} \times b_{4,0} + a_{4,2} = 10 \times 5 + 35 = 50 + 35 = 85$

2 Propriedades

1 $a_{i,0} = i!$

Ex: $a_{4,0} = 24 = 4!$

2

$$\sum_{j=0}^i (-1)^j a_{ij} = 0$$

Ex $i = 5$: $120 - 274 + 225 - 85 + 15 - 1 = 0$

3 A segunda diagonal principal D_2 em $a_{i,0}$ formam a sequência dos números triangulares

$$D_2 : a_{1,0} = 1 = T_1, \quad a_{2,1} = 3 = T_2, \quad a_{3,2} = 6 = T_3, \dots$$

4

$$\sum_{j=0}^i a_{ij} = i!$$

Ex $i = 4$: $6 + 11 + 6 + 1 = 24 = 4!$

3 O que resolve o Triângulo Gama Γ ? Cada entrada do Triângulo Gama é um coeficiente do polinômio que expressa o fatorial crescente de base $(n+1)^k$ ou decrescente de base $(n-1)^k$. Os fatoriais decrescentes são utilizados para se obter o termo geral de progressões aritméticas de ordem $k > 1$, onde devem ser conhecidos os $k+1$ primeiros termos. Assim, temos:

PA_k:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \Delta^i \prod_{j=1}^i (n-j)$$

Ex $k = 2$:

$$a_n = a_1 + \Delta(n-1) + \frac{1}{2} \Delta^2(n-1)(n-2)$$

Ex $k = 3$:

$$a_n = a_1 + \Delta(n-1) + \frac{1}{2} \Delta^2(n-1)(n-2) + \frac{1}{6} (n-1)(n-2)(n-3)$$

...

O Triângulo Gama Γ nos dá os coeficientes do polinômio dos fatoriais decrescentes, da direita para a esquerda e com sinais alternados, iniciando com sinal positivo.

$$k \quad 1 \quad n \quad (n-1)^k = P(n) = \sum_{k=0}^i (-1)^k a_{i,i-k} n^{i-k}$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad (n-1)$$

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$$

$$3 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \quad 1 \quad n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = (n-1)(n-2)(n-3)$$

...

Δ^c : Diferenças Finitas

$$\Delta = a_2 - a_1$$

$$\Delta^2 = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1)$$

$$\Delta^3 = [(a_4 - a_3) - (a_3 - a_2)] - [(a_3 - a_2) - (a_2 - a_1)]$$

...

Assim, temos:

PA₁: $a_n = a_1 + \Delta(n-1)$

PA₂: $a_n = a_1 + \Delta(n-1) + \frac{1}{2} \Delta^2(n-1)(n-2)$

$$\left[= a_1 + \frac{1}{2} \Delta^2(n^2 - 3n + 2) \right]$$

PA₃:

$$a_n = a_1 + \Delta(n-1) + \frac{1}{2} \Delta^2(n-1)(n-2) + \frac{1}{6} \Delta^3(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\left[+\frac{1}{2}\Delta^2(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{6}\Delta^3(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) \right]$$

PA₄:

$$a_n = a_1 + \Delta(n-1) + \frac{1}{2}\Delta^2(n-1)(n-2) + \frac{1}{6}\Delta^3(n-1)(n-2)(n-3) \\ + \frac{1}{24}\Delta^4(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\ \left[+\frac{1}{2}\Delta^2(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{6}\Delta^3(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) + \frac{1}{24}\Delta^4(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24) \right]$$

PA₅:

$$a_n = a_1 + \Delta(n-1) + \frac{1}{2}\Delta^2(n-1)(n-2) + \frac{1}{6}\Delta^3(n-1)(n-2)(n-3) \\ + \frac{1}{24}\Delta^4(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \frac{1}{120}\Delta^5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\ \left[\frac{1}{2}\Delta^2(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{6}\Delta^3(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) \right. \\ \left. + \frac{1}{24}(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24) + \frac{1}{120}(n^5 - 15n^4 + 85n^3 - 225n^2 + 274n - 120) \right]$$

Os valores entre colchetes mostram o polinômio do fatorial de base $(n-1)^k$ com coeficientes dados pelas linhas do Triângulo Gama Γ .

Ex: Vamos construir uma sequência com estrutura PA₃ e encontrar o termo geral a_n .
Termos conhecidos: a_1, a_2, a_3, a_4 .

$$\Delta^3 = 9 \text{ (constante)}, \quad \text{PA}_3$$

$$\Delta^2 = 4, \quad \Delta = 3$$

$$a_n : \begin{array}{cccccc} & 1 & 4 & 11 & 31 & \cdots & a_n \\ & & 3 & 7 & 20 & & \\ & & & 4 & 13 & & \\ & & & & 9 & & \end{array}$$

Triângulo Gama Γ :

$$\begin{array}{lll} 1 & (n-1)^0 = 1 & \Delta = 3 \\ 1 \ 1 & (n-1)^1 = 1n - 1 & \Delta^2 = 4 \\ 2 \ 3 \ 1 & (n-1)^2 = 1n^2 - 3n + 2 & \Delta^3 = 9 \text{ (constante)} \\ 6 \ 11 \ 6 \ 1 & (n-1)^3 = 1n^3 - 6n^2 + 11n - 6 & \end{array}$$

$$a_n = a_1 + \frac{1}{1!}\Delta(n-1) + \frac{1}{2!}\Delta^2(n-1)^2 + \frac{1}{3!}\Delta^3(n-1)^3 \\ = 1 + 3(n-1) + \frac{1}{2} \cdot 4(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{6} \cdot 9(n^3 - 6n^2 + 11n - 6)$$

$$a_n = 1 + 3n - 3 + 2n^2 - 6n + 4 + \frac{3}{2}n^3 - 9n^2 + \frac{33}{2}n - 9$$

$$a_n = \frac{3}{2}n^3 - 7n^2 + \frac{27}{2}n - 7$$

$$a_4 = \frac{3}{2} \cdot 4^3 - 7 \cdot 4^2 + \frac{27}{2} \cdot 4 - 7 = 96 - 112 + 54 - 7 = 31 \quad \checkmark$$

Para as três primeiras linhas do Triângulo Gama Γ , temos:

$$\begin{array}{r} 1 \quad n \\ 1 \ 1 \quad n^2 + n \\ 2 \ 3 \ 1 \quad 2n^3 + 3n^2 + n \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \frac{1 \cdot n}{1!} = n$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1n^2 + 1n}{2!} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T(n)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + 1 \cdot n}{3!} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Ex $n = 6$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6}{6} = \frac{432 + 108 + 6}{6} = \frac{546}{6} = 91$$

3 Triângulo de Pascal com Translação $C_1 \rightarrow C_0$

(C : coluna)

Triângulo de Pascal $\xrightarrow{\text{Translação } C_1 \rightarrow C_0}$ Triângulo resultante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_0 \ C_1$

1 O que resolve o Triângulo de Pascal com Translação $C_1 \rightarrow C_0$?

Cada entrada do Triângulo de Pascal com Translação $C_1 \rightarrow C_0$ é um coeficiente do polinômio que calcula a diferença de potências entre números naturais consecutivos: $(n+1)^k - n^k$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} (n+1)^1 - n^1 &= 1 \cdot n^0 = 1 \\ (n+1)^2 - n^2 &= 2n + 1 \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
(n+1)^5 - n^5 &= 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \\
(n+1)^6 - n^6 &= 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 6n + 1
\end{aligned}$$

Ex $n = 13, k = 5$:

$$14^5 - 13^5 = 5 \cdot 13^4 + 10 \cdot 13^3 + 10 \cdot 13^2 + 5 \cdot 13 + 1 = 142805 + 21970 + 1690 + 65 + 1 = 166531 = 537824 - 371293$$

Por recorrência, pode-se calcular $\sum_{k=1}^n k^i = S_i$.

$$\forall k, i \in \mathbb{N}, S_0 = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

$$\boxed{1} \quad (k+1)^j - k^j = (n+1)^j - 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Aplicando o operador Σ dos dois lados da equação tem-se:

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^2 - k^2] = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1, \quad \sum_{k=1}^n [(k+1)^2 - k^2] = (n+1)^2 - 1$$

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1 + n$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + S_0$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} [(n+1)^3 - 1 - 3S_1 - S_0]$$

$$= \frac{1}{3} \left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3 \cdot \frac{n^2 + n}{2} - n \right]$$

$$S_2 = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4] = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6 \left[\frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) \right] + 4 \cdot \frac{n^2 + n}{2} + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 = 4S_3 + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n$$

$$4S_3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n = n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = T_n^2$$

Portanto, o Triângulo de Pascal com Translação $C_1 \rightarrow C_0$ resolve $(n+1)^k - n^k$ e, por recorrência, $S_i = \sum_{k=1}^n k^i$, $k, i \in \mathbb{N}$.

4 Triângulo de Pascal com Translação $C_2 \rightarrow C_0$

(C : coluna)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Translação } C_2 \rightarrow C_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{C_0 \quad C_1 \quad C_2}$

Como os números triangulares são números binomiais $T(n) = \binom{n+1}{2}$, tem-se:

$$\binom{2}{2}, \quad \binom{3}{2} \binom{3}{3}, \quad \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}, \quad \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}, \quad \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}$$

1 O que resolve o Triângulo de Pascal com Translação $C_2 \rightarrow C_0$?

Assim como na Translação $C_1 \rightarrow C_0$, calcula a diferença de potências entre números naturais consecutivos e, por recorrência, $\sum_{k=1}^n k^i$, $\forall k, i \in \mathbb{N}$.

Para esse triângulo a identidade é:

$$(a+1)^n = a^n + n a^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k}$$

Cada linha do triângulo nos dá os coeficientes em $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k}$.

Ex $a = 6$, $n = 4$:

$$7^4 = 6^4 + 4 \cdot 6^3 + \binom{4}{2} \cdot 6^2 + \binom{4}{3} \cdot 6 + \binom{4}{4} \cdot 6^0 = 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 6 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 1 = 1296 + 864 + 216 + 24 + 1 = 2401 = 7^4$$

5 Triângulo de Manso

1 Regras de Construção

$$1 \quad g_{i,0} = i!$$

$$2 \quad g_{i,1} = \frac{1}{2}(i+1)!$$

$$3 \quad g_{i,e} = \frac{1}{3} g_{(i-1,1)} \cdot T_i$$

$$4 \quad g_{ij} = 0 \quad \forall j = 2w + 1, \quad w > 0$$

$$5 \quad g_{ij} = \frac{1}{D} g_{(i-1,j)} \cdot T_i, \quad \forall j = 2w, \quad w > 0$$

$$D = \frac{i - (j - 1)}{2}$$

$$6 \quad g_{ii} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} g_{ij} \quad (T \text{ é um número triangular})$$

2 Construção do Triângulo de Manso

Entradas $g_{i,j}$:

T_i	i	Entradas $g_{i,j}$					
0	0	1					
1	1	1	1				
3	2	2	3	1			
6	3	6	12	6	0		
10	4	24	60	40	0	-4	
15	5	120	360	300	0	-60	0
21	6	720					

$$300 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 15 = \frac{900}{3} \quad \text{Regra } \boxed{3}$$

3 Propriedades

$$1 \quad B_k = \frac{(-1)^i g_{ii}}{(i+1)!}, \quad B_k \text{ Números de Bernoulli}$$

2

$$\sum_{j=0}^i g_{ij} = (i+1)!$$

3

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} g_{ij} = 0$$

4 $g_{i,0} = 2 \times g_{(i-1,1)}$

4 **O que resolve o Triângulo de Manso?**

Cada entrada do Triângulo de Manso aplicado à Fórmula de Manso nos dá um coeficiente do polinômio que calcula $\sum_{k=1}^n k^i$.

1 **Fórmula de Manso**

$$\sum_{k=1}^n k^i = \frac{1}{(i+1)!} \sum_{j=0}^i g_{ij} n^{i+1-j}$$

Ex $i = 3, n = 6$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 k^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \frac{1}{(3+1)!} \sum_{j=0}^3 g_{3j} n^{4-j} \\ &= \frac{1}{4!} (6n^4 + 12n^3 + 6n^2) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = T_n^2 = T_6^2 = 21^2 = 441 \end{aligned}$$

5 $\sum_{k=1}^n k^i$ pela Fórmula de Faulhaber e os Números de Bernoulli: B_k

1 **Números de Bernoulli: calculados por recorrência**

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

$$n = 1: \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0 \Rightarrow 2B_1 = -1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$n = 2: \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 0$$

$$3B_2 = -1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right); \quad B_2 = \frac{1}{6}$$

2 Fórmula de Faulhaber

$$\sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p+1}{k} B_k \cdot n^{p+1-k}$$

Ex $p = 3, n = 6$:

$$\binom{4}{0} = 1; \quad \binom{4}{1} = 4; \quad \binom{4}{2} = 6; \quad \binom{4}{3} = 4$$

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \frac{1}{4} \left(1 \cdot 1 \cdot n^4 + (-1) \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot n^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^2 + (-1) \cdot 4 \cdot 0 \cdot n \right)$$

$$= \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = T_n^2 = T_6^2 = 21^2 = 441$$

6 Triângulo de Pascal com Fator $\frac{1}{2}$ para $a_{ij} \neq 1$

Triângulo de Pascal original \rightarrow Triângulo com Fator $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 5 & 5 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \frac{15}{2} & 10 & \frac{15}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1 O que resolve o Triângulo de Pascal com Fator $\frac{1}{2}$ para $a_{ij} \neq 1$?

Considerando apenas as entradas do Triângulo de Pascal afetadas pelo fator $\frac{1}{2}$, resolve a equação $(i+1)^k - i^k = 2a_i + 1$ onde cada entrada é o coeficiente do polinômio a_i dado

por $\sum_{w=0}^{k-1} a_{ij} i^{k-1+w}$. Então, temos:

$$k = 0 : \quad a_i = -\frac{1}{2}$$

$$k = 1 : \quad a_i = \frac{0}{2} i^0 = 0$$

$$k = 2 : \quad a_i = \frac{2}{2} i = i$$

$$k = 3 : \quad a_i = \frac{3}{2} i^2 + \frac{3}{2} i$$

$$k = 4 : \quad a_i = 2i^3 + 3i^2 + 2i$$

$$k = 5 : \quad a_i = \frac{5}{2} i^4 + 5i^3 + 5i^2 + \frac{5}{2} i$$

$$k = 6 : \quad a_i = 3i^5 + \frac{15}{2} i^4 + 10i^3 + \frac{15}{2} i^2 + 3i$$

Ex $i = 6, k = 3$:

$$7^3 - 6^3 = 2 \left(\frac{3}{2} \cdot 6^2 + \frac{3}{2} \cdot 6 \right) + 1 = 2(54 + 9) + 1 = 108 + 19 = 127 = 343 - 216$$