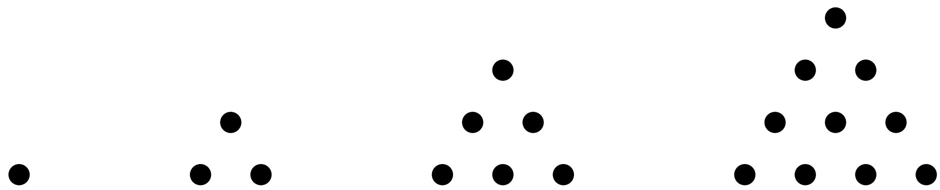
# Números Triangulares

F. Manso

Junho, 2026

$$T_{(n)} = \left(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots\right) \quad \text{PA}_2$$

$T(3) = 6$ — Triângulo equilátero; número de pontos por lado: 3; número total de pontos: 6.



$T(1) = 1$ $T(2) = 3$ $T(3) = 6$ $T(4) = 10$

$$T_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} i \qquad T(3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$T_{(n)} = \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}$$

$$T(3) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2!} = 6$$

$\boxed{1}$ O que são os números triangulares?

$\boxed{2}$ Dado um $n \in \mathbb{N}$, como saber se $n$ é um número triangular?

$\boxed{3}$ Identidades notáveis dos números triangulares.

## $\boxed{1}$ O que são os números triangulares

Seja $f$ uma função polinomial de grau 2, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

tendo como gráfico uma parábola com concavidade para cima $\left(a = \frac{1}{2} > 0\right)$ e ponto de mínimo $V(x_v, f(x_v))$.

$$\frac{df(x)}{dx} = x + \frac{1}{2} = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$V\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{8}\right)$$

Segundo a Regra de Sinais de Descartes, $f(x) = 0$ e $f(-x) = 1$, temos uma raiz negativa e uma raiz igual a zero:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \implies x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0 \implies x = R_1 = 0$$

$$\implies \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \implies x = R_2 = -1$$

O gráfico da função é simétrico em relação à reta vertical $x = -\frac{1}{2}$ $(x_v)$. Portanto, para cada elemento da imagem da função temos dois elementos distintos do domínio (função não injetiva), de forma que $f(x) = f(-x-1)$, $\forall\, x \in D(f)$.

**Ex:** $x = 3 \implies f(3) = f(-4)$

$$f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + \frac{1}{2}(-4) = 8 - 2 = 6$$

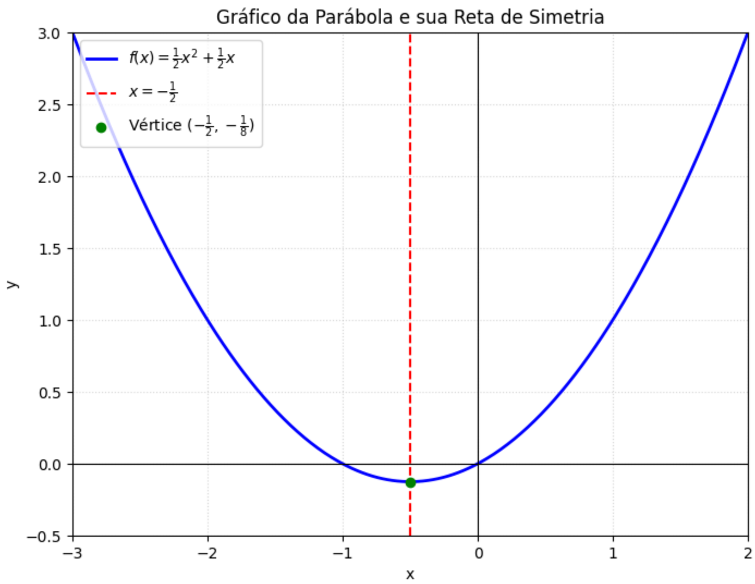



Figura 1: Gráfico da Parábola $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ e sua Reta de Simetria $x = -\frac{1}{2}$

Pode-se restringir o domínio da função ao conjunto dos números inteiros: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$f(z) = f(-z-1); \quad f(0) = f(-1) = 0$$

Para todos os outros valores do domínio, $f(z) > 0$.

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z$$

Pode-se ainda restringir o domínio da função ao conjunto dos números naturais $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Foi nesse domínio que, historicamente, definiram-se os números triangulares (números figurados), com a notação $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. A escolha dos termos *números triangulares*, *números figurados*, é porque para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $T(n)$ representa o total de pontos de um triângulo equilátero de lado formado por $n$ pontos.

Pode-se também descrever os números triangulares $T(n)$ como as somas parciais dos números naturais:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

**Ex:** $T(6) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \dfrac{6 \times 7}{2} = 21$

Do ponto de vista de uma sequência numérica, os números triangulares constituem uma PA de segunda ordem com termo geral $T_n$ dado por:

$$T_n = \frac{T_1}{0!} + \frac{\Delta(n-1)}{1!} + \frac{\Delta^2(n-1)(n-2)}{2!}$$

com $\Delta = T_2 - T_1 = 3 - 1 = 2$, $\Delta^2 = (T_3 - T_2) - (T_2 - T_1) = (6-3) - (3-1) = 3 - 2 = 1$. Então:

$$T_n = 1 + 2n - 2 + \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$T_n = \left(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

Pode-se ainda definir os números triangulares como números binomiais dado por:

$$T_n = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}$$

**Ex:** $T_6 = \dbinom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!\,5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot \cancel{5!}} = 21$

Portanto, os números triangulares são:

$\boxed{1}$ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n \qquad T_{(n)} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{2}$ $T_{(n)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$\boxed{3}$ PA$_2$: $T_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n$

$\boxed{4}$ $T_n = \dbinom{n+1}{2} = \dfrac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}$

# $\boxed{2}$ Dado um $n \in \mathbb{N}$, como saber se $n$ é um número triangular?

Pode-se efetuar dois testes para determinar se um dado $n \in \mathbb{N}$ é um número triangular. O primeiro teste serve para descartar $n$ como triangular, mas ele não é conclusivo para afirmar se $n$ é triangular; o que irá fazer isso, de forma conclusiva, será o segundo teste.

**Teste 1:** $T_n \equiv 2 \pmod 3$. Como não existe número triangular que seja congruente a 2 mod 3, se $n$ for positivo para esse teste, pode-se descartá-lo. Se o teste for negativo, é necessário efetuar o segundo teste.

**Teste 2:** $(8n+1)^{1/2} = z \in \mathbb{Z}$; se o teste for positivo, $n$ será o $\dfrac{z-1}{2}$-ésimo triangular.

**Ex:** $n = 17$. Teste 1: $17 \equiv 2 \pmod 3$, logo 17 **não** é um número triangular (conclusivo).

**Ex:** $n = 28$. Teste 1: $28 \equiv 1 \pmod 3$ (não conclusivo); Teste 2: $\sqrt{8 \times 28 + 1} = \sqrt{225} = 15 \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{15-1}{2} = 7$; logo 28 é o sétimo número triangular, $T(7) = 28$.

# $\boxed{3}$ Identidades notáveis dos números triangulares

## $\boxed{1}$ Da paridade dos números triangulares

Se $n \equiv 1 \pmod 4$ ou $n \equiv 2 \pmod 4 \implies T(n)$ é ímpar.
Se $n \equiv 3 \pmod 4$ ou $n \equiv 0 \pmod 4 \implies T(n)$ é par.

**Ex:** $T_7 = 28$; $7 \equiv 3 \pmod 4$, $\therefore T_7 = 28$ par.
**Ex:** $T_{13} = 91$; $13 \equiv 1 \pmod 4$, $\therefore T_{13} = 91$ ímpar.

## $\boxed{2}$ Da divisibilidade dos números triangulares por 3

Se $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n \equiv 0 \pmod 3 \implies 3 \mid T(n)$.

**Ex:** $n = 6$; $6 \equiv 0 \pmod 3 \implies 3 \mid T_6$; $3 \mid 21$.
**Ex:** $n = 14$; $14 \equiv 2 \pmod 3 \implies 3 \mid T_{14}$; $3 \mid 105$.

## $\boxed{3}$ Números primos e números triangulares

Existe um único número primo par $P(1) = 2$. Do mesmo modo existe um único número primo triangular $T(2) = 3$.

## $\boxed{4}$ Números perfeitos e números triangulares

Todo número perfeito conhecido (número perfeito par) é número triangular.

**Ex:** $T_3 = 6$. $SD(6)$: $1 + 2 + 3 = 6$.
**Ex:** $T_7 = 28$. $SD(28)$: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

## $\boxed{5}$ $(T_n + T_{n+3}) - (T_{n+1} + T_{n+2}) = 2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$: $(T_6 + T_9) - (T_7 + T_8) = 2$; $(21 + 45) - (28 + 36) = 66 - 64 = 2$.

$\boxed{6}$ $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

A soma de dois triangulares consecutivos é sempre um quadrado perfeito.

**Ex:** $T_3 + T_4 = 4^2$; $6 + 10 = 16 = 4^2$.
**Ex:** $T_{10} + T_{11} = 11^2$; $55 + 66 = 121 = 11^2$.

### $\boxed{7}$ Identidade de Nicômaco: a soma dos cubos dos naturais de 1 até $n$ é igual ao quadrado de $T(n)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (T_n)^2$$

**Ex:** $n = 6$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (T_6)^2 = 21^2 = 441$.

### $\boxed{8}$ $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$: a diferença de quadrados de triangulares consecutivos é igual ao cubo de $n$

**Ex:** $T_6 = 21$, $T_5 = 15$; $T_6^2 - T_5^2 = 6^3$; $441 - 225 = 216 = 6^3$.

### $\boxed{9}$ $T_n^2 + T_{n+1}^2 = T_{(n+1)^2}$: a soma de quadrados de triangulares consecutivos é o triangular de índice $(n+1)^2$

**Ex:** $T_{12} = 78$, $T_{13} = 91$; $T_{12}^2 + T_{13}^2 = T_{13^2} = T_{169}$; $78^2 + 91^2 = \dfrac{169 \times 170}{2} = 14365$.

### $\boxed{10}$ Se $n \equiv 1 \pmod 3$, então 3 não divide $T_n$

**Ex:** $n = 4 \equiv 1 \pmod 3$; $T_4 = 10$ e $3 \nmid 10$.

### $\boxed{11}$ $T_n \times T_{n+1} + T_{n+1} \times T_{n+2} = T_{n^2+3n+2}$

**Ex:** $n = 11$: $T_{11} \times T_{12} + T_{12} \times T_{13} = T_{156}$;

$$66 \times 78 + 78 \times 91 = \frac{156 \times 157}{2}; \quad 5148 + 7098 = 12246.$$

### $\boxed{12}$ $T_{(n+1)} \times T_{(n+3)}$ divide $T_n \times T_{(n+2)} \times T_{(n+4)}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{T_n \cdot T_{(n+2)} \cdot T_{(n+4)}}{T_{(n+1)} \cdot T_{(n+3)}} = \frac{1}{2}\, n(n+5)$$

**Ex:** $n = 8$: $\dfrac{T_8 \times T_{10} \times T_{12}}{T_9 \times T_{11}} = \dfrac{1}{2} \cdot 8(8+5)$;

$$\frac{36 \times 55 \times 78}{45 \times 66} = \frac{8 \times 13}{2}; \quad \frac{154440}{2970} = \frac{104}{2} = 52.$$

## $\boxed{13}$ $T_{2n}$ divide o produto $T_{2n+1} \cdot 2T_n$, $n \neq 0$

$$\frac{T_{2n+1} \cdot 2T_n}{T_{2n}} = (n+1)^2$$

**Ex:** $n = 7$: $\dfrac{T_{15} \cdot 2T_7}{T_{14}} = 8^2$; $\dfrac{120 \times 2 \times 28}{105} = 64$.

## $\boxed{14}$ Identidade de Fermat–Gauss: todo número natural pode ser escrito como a soma de no máximo três números triangulares, incluindo $T(0) = 0$ e a possibilidade de parcelas repetidas

$$n = \Delta + \Delta + \Delta \quad \text{onde } n \in \mathbb{N} \text{ e } \Delta \text{ é um número triangular.}$$

**Ex:** $n = 47$: $47 = T_9 + T_1 + T_1 = 45 + 1 + 1$.

## $\boxed{15}$ Se $n \equiv 2 \pmod 3$, então $n$ não é um número triangular

**Ex:** $n = 5 \equiv 2 \pmod 3$; 5 não é um número triangular.

## $\boxed{16}$ A sequência dos números triangulares constitui a terceira diagonal do Triângulo de Pascal

$$T_{(n)} = \binom{n+1}{n-1} = \binom{2}{0}, \binom{3}{1}, \binom{4}{2}, \binom{5}{3}, \binom{6}{4}, \binom{7}{5}, \ldots = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$$

## $\boxed{17}$ Para todo número triangular, $8T(n)+1$ é um quadrado perfeito.

$8T_n + 1 = (2n+1)^2$

**Ex:** $n = 13$, $T_n = 91$; $8 \times 91 + 1 = 729 = 27^2$.

## $\boxed{18}$ Números triangulares e análise combinatória

Em análise combinatória os números triangulares expressam o número de maneiras que podemos escolher 2 objetos em um conjunto com 2 ou mais objetos.

$$T(n) = C_{(n+1),2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}$$

**Ex:** $T(4) = 10$ é o número de maneiras que podemos escolher 2 objetos em um conjunto com 5 objetos. Sejam os objetos $A, B, C, D, E$:

$$(A,B), (A,C), (A,D), (A,E) \to 4 \qquad (B,C), (B,D), (B,E) \to 3$$

$$(C,D), (C,E) \to 2 \qquad (D,E) \to 1$$

Portanto, $4 + 3 + 2 + 1 = 10 = T(4)$.

$\boxed{19}$ $T_{(4n-1)} = 2n(2n-1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 8$; $T_{31} = 496 = 16 \times 31$.

$\boxed{20}$ $T_{(2n-1)} = n(2n-1)$; $T_{(2n)} = n(2n+1)$

$n$ e $T(n)$ terão a mesma paridade.

**Ex:** $n = 7$: $T_{13} = 7 \times 13 = 91$; $T_{14} = 7 \times 15 = 105$.
**Ex:** $n = 12$: $T_{23} = 12 \times 23 = 276$; $T_{24} = 12 \times 25 = 300$.

$\boxed{21}$ **Se $T(n)$ é o primeiro termo de uma PA de razão 1, então a soma dos $n+1$ termos é dada por $S_{(n+1)} = \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 2n)$**

**Ex:** $T(4) = 10$. PA com 5 termos: $10, 11, 12, 13, 14$.

$$S_5 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = \frac{1}{2}(4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4) = \frac{1}{2}(120) = 60.$$

$\boxed{22}$ $T_{(2n+3)} + 2T_{(2n+4)} + 2S_{n+1} + 1 = (n+3)^3$

**Ex:** Para $n = 5$, $T(5) = 15$. PA: $(15, 16, 17, 18, 19, 20, 21)$.

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 2n) = \frac{1}{2}(5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5) = 105$$

$$T_{13} + 2 \cdot T_{14} + 2 \times 105 + 1 = 8^3; \quad 91 + 210 + 210 + 1 = 512.$$

$\boxed{23}$ **Se $n$ é ímpar, $T_n$ divide $n!$; se $n$ é par e $n+1$ é um número composto, $T_n$ divide $n!$. Se $n$ é par e $n+1$ é um número primo, $T_n$ não divide $n!$ e $\frac{n!}{T_n} = j + \frac{2}{n+1}$, $j \in \mathbb{Z}$**

**Ex:** $n = 3$, $T_3 = 6$: $\frac{3!}{6} = \frac{6}{6} = 1$.
**Ex:** $n = 8$, $n + 1 = 9$ composto, $T_8 = 36$: $\frac{8!}{36} = \frac{40320}{36} = 1120$.
**Ex:** $n = 4$, $n + 1 = 5$ primo, $T_4 = 10$: $\frac{4!}{10} = \frac{24}{10} = 2 + \frac{2}{5}$.

$\boxed{24}$ **Se $n$ é ímpar, então $n$ divide $T_n$ e $\frac{T_n}{n} = \frac{n+1}{2}$; se $n$ é par, então $2n$ divide $2T_n + n$ e $\frac{2T_n + n}{2n} = \frac{n+2}{2}$**

**Ex:** $n = 3$: $\frac{T_3}{3} = \frac{6}{3} = 2$.
**Ex:** $n = 6$: $\frac{2T_6 + 6}{12} = \frac{48}{12} = 4$.

## $\boxed{25}$ Números triangulares e determinantes de matrizes de ordem 2

$$\det A = \begin{vmatrix} n & T_n \\ n+1-k & T_{n+1} \end{vmatrix} = (k+1)\cdot T_n \quad \forall\, n,k \in \mathbb{N}$$

**Ex:** $n = 9$, $k = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} 9 & T_9 \\ 7 & T_{10} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 9 & 45 \\ 7 & 55 \end{pmatrix} = 495 - 315 = 180 = 4 \times 45.$$

## $\boxed{26}$ Números triangulares e determinantes de matrizes de ordem 3

$$\det A = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ T_n & T_{n+1} & T_{n+2} \\ n+k & n+k+1 & n+k+2 \end{vmatrix} = k \quad \forall\, n,k \in \mathbb{N}$$

**Ex:** $n = 4$, $k = 5$:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 10 & 15 & 21 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = \frac{20}{4} = 5 = k.$$

## $\boxed{27}$ $T_{(2n)} + T_{(2n+2)} + 2n + 1 = (2n+2)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 13$: $T_{26} + T_{28} + 27 = 28^2$; $351 + 406 + 27 = 784 = 28^2$.

## $\boxed{28}$ $T_{(3n+1)} + T_{(3n+2)} - T_{(4n+2)} = (n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 12$: $T_{37} + T_{38} - T_{50} = 13^2$; $703 + 741 - 1275 = 169 = 13^2$.

## $\boxed{29}$ $T_{(2n-1)} + T_{(2n+1)} + 2n = (2n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 7$: $T_{13} + T_{15} + 14 = 15^2$; $91 + 120 + 14 = 225 = 15^2$.

## $\boxed{30}$ $\dfrac{\left[8\left(T_n^2 + T_{n+1}^2\right) + 1\right]^{1/2} - 1}{2} = (n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 2$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$:

$$\frac{\left[8(3^2 + 6^2) + 1\right]^{1/2} - 1}{2} = \frac{\sqrt{8 \cdot 45 + 1} - 1}{2} = \frac{\sqrt{361} - 1}{2} = \frac{19 - 1}{2} = 9 = 3^2 = (n+1)^2.$$

## $\boxed{31}$ Sejam $T_a$, $T_b$ e $T_c$ números triangulares. Fixando $a = 2$, por recorrência encontra-se os valores de $b$ que satisfaçam a equação $T_a \times T_b = T_c$

$b_0 = 1$: solução trivial $T_2 \times T_1 = T_2$.
$b_1 = 5$: solução não trivial $T_2 \times T_5 = T_9$. Por recorrência: $b_2 = 5 \times (5-1)/1 = 20$; $b_3 = 20 \times 19/5 = 76$.
$\ldots \quad T_2 \times T_{20} = T_{35}$; $T_2 \times T_{76} = T_{132}$.

$\boxed{32}$ **Números triangulares e potências de 2**

$$T_{(2^n-1)} + T_{2^n} = 2^{2n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

**Ex:** $n = 7$: $T_{127} + T_{128} = 2^{14}$; $8128 + 8256 = 16384 = 2^{14}$.

$\boxed{33}$ $T_{2n-1} \cdot (2n-1) = n(2n-1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 9$: $T_{17} \times 17 = 9 \times 17^2$; $153 \times 17 = 9 \times 289 = 2601$.

$\boxed{34}$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} T_{(n^2-n-1+i)} = \sum_{i=0}^{n-2} T_{(n^2+i)} \qquad \forall\, n \geq 2$

**Ex:** $n = 6$: $T_{29} + T_{30} + T_{31} + T_{32} + T_{33} + T_{34} + T_{35} = T_{36} + T_{37} + T_{38} + T_{39} + T_{40}$

$= 435 + 465 + 496 + 528 + 561 + 595 + 630 = 666 + 703 + 741 + 780 + 820 = 3710.$

$\boxed{35}$ $T_n + (T_{n+1})^2 + T_{n+2} = \left(\dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{3}{2}n + 2\right)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 15$: $T_{15} + T_{16}^2 + T_{17} = \left(\frac{1}{2} \cdot 15^2 + \frac{3}{2} \cdot 15 + 2\right)^2$

$$120 + 18496 + 153 = (112{,}5 + 22{,}5 + 2)^2 = 137^2 = 18769.$$

$\boxed{36}$ $T_{(n+1)} \times T_{(n+2)} - T_n \times T_{(n+3)} + 1 = (n+2)^3 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 4$: $T_5 \times T_6 - T_4 \times T_7 + 1 = 6^3$; $15 \times 21 - 10 \times 28 + 1 = 315 - 280 + 1 = 36$.

$\boxed{37}$ $T_{(2n-1)} + (2n-1) + T_{(2n+2)} + (2n+2) = (2n+2)^2$

**Ex:** $n = 13$: $T_{25} + 25 + T_{28} + 28 = 28^2$; $325 + 25 + 406 + 28 = 784 = 28^2$.

$\boxed{38}$ $T(n) = \dfrac{1}{32}\left[(4n+3)^2 + (4n+4)^2 - (4n+5)^2\right] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 7$: $T(7) = \dfrac{1}{32}(31^2 + 32^2 - 33^2) = \dfrac{1}{32}(896) = 28 = T_7$.

$\boxed{39}$ $2n-1$ **divide** $T_{2n-1}$**;** $\dfrac{T_{2n-1}}{2n-1} = n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 11$: $\dfrac{T_{21}}{21} = \dfrac{231}{21} = 11 = n$.

$\boxed{40}$ **$2n+1$ divide $T_{2n}$;** $\dfrac{T_{2n}}{2n+1} = n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 7$: $\dfrac{T_{14}}{15} = \dfrac{105}{15} = 7 = n$.

$\boxed{41}$ **$2n+1$ divide a soma $(T_{2n} + T_{2n+1})$;** $\dfrac{T_{2n} + T_{2n+1}}{2n+1} = 2n+1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 10$: $\dfrac{T_{20} + T_{21}}{21} = 21$; $\dfrac{210 + 231}{21} = \dfrac{441}{21} = 21$.

$\boxed{42}$ $T_n \times T_{(n+1)} \times T_{(n+2)} = (T_{n+1} - 1) \times T_{n+1}^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$: $T_6 \times T_7 \times T_8 = (T_7 - 1) \times T_7^2$;

$$21 \times 28 \times 36 = 27 \times 28^2; \quad 21168 = 27 \times 784.$$

$\boxed{43}$ $T_n^2 + T_{(n+1)}^2 = T_{(T_n + T_{n+1})} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 29$: $T_{29}^2 + T_{30}^2 = T_{900}$; $435^2 + 465^2 = 405450 = 189225 + 216225$.

$\boxed{44}$ $T_n + (2n+1)^2 = T_{(3n+1)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 13$: $T_{13} + 27^2 = T_{40}$; $91 + 729 = 820 = T_{40}$.

$\boxed{45}$ **Se $n = k^2$, então** $\dfrac{T_n}{n} = \left[\dfrac{1}{2}k^3 + \dfrac{1}{2}k\right]^2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $k = 13$, $n = 13^2 = 169$:

$$\frac{T_{169}}{169} = \left[\frac{1}{2} \cdot 13^3 + \frac{1}{2} \cdot 13\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot 2197 + \frac{13}{2}\right]^2 = 1105^2 = 1221025.$$

$\boxed{46}$ $\dfrac{1}{3}\left[(n+1)^3 - n^3 + (n+1)^2 - n^2 + T_{(n+1)} - T_n\right] = (n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$: $\dfrac{1}{3}(64 - 27 + 16 - 9 + 10 - 6) = 4^2$.

$\boxed{47}$ $T_n = \dfrac{n^3 - n}{2n - 2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 16$: $T_{16} = \dfrac{16^3 - 16}{2 \times 16 - 2} = \dfrac{4080}{30} = 136$.

$\boxed{48}$ $T_{2n-1} = \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i-1} \cdot i^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 5$: $T_9 = 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2 = 1-4+9-16+25-36+49-64+81 = 45 = T_9$.

$\boxed{49}$ $\sum_{i=n}^{n+k-1} i^3 = \left(T_{(n+k-1)}\right)^2 - \left(T_{(n-1)}\right)^2 \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$, $k = 7$: $3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = T_9^2 - T_2^2$;

$$27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 = 45^2 - 3^2 = 2016.$$

$\boxed{50}$ $T_n + (T_{n+1})^2 + T_{n+2} = (T_{n+1} + 1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 18$: $T_{18} + T_{19}^2 + T_{20} = (T_{19} + 1)^2$;

$$171 + 36100 + 210 = 191^2 = 36481.$$

$\boxed{51}$ $T_n^k - T_n^{k-1} = T_n^{k-1}(T_n - 1) \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$, $k = 3$: $T_6^3 - T_6^2 = T_6^2(T_6 - 1)$;

$$21^3 - 21^2 = 21^2(21 - 1) = 9261 - 441 = 8820 = 441 \times 20.$$

$\boxed{52}$ $T_{2n-1} \times T_{2n} + n^2 = (2n^2)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 5$: $T_9 \times T_{10} + 5^2 = 50^2$; $45 \times 55 + 25 = 2500 = 50^2$.

$\boxed{53}$ $T_n \times T_{n-1} = \dfrac{n^2(n^2-1)}{4} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 21$: $T_{21} \times T_{20} = \dfrac{21^2(21^2-1)}{4}$; $231 \times 210 = \dfrac{441 \times 440}{4} = 48510$.

## $\boxed{54}$ Números triangulares e a soma de naturais consecutivos para todo $n, k$ naturais

Número de parcelas: $n$; Primeiro termo da soma: $a_1 = n(k-1)+1$; Soma $= T_n + n^2(k-1)$.

**Ex:** $n = 7$, $k = 4$: $a_1 = n(k-1) + 1 = 7 \times 3 + 1 = 22$. Número de parcelas $= n = 7$. Soma $= T_7 + 7^2 \times 3 = 28 + 147 = 175$; $22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 = 175$.

$\boxed{55}$ $(n+1)$ **divide** $T_{2n+1}$**;** $\dfrac{T_{2n+1}}{n+1} = 2n + 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$: $\dfrac{T_{13}}{7} = 13$; $\dfrac{91}{7} = 13$.

$\boxed{56}$ $\dfrac{n^2}{T_n} = 1 + \dfrac{T_{(n-1)}}{T_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 8$: $\dfrac{64}{36} = 1 + \dfrac{28}{36}$.

$\boxed{57}$ $\dfrac{n^3}{T_n} = 2(n-1) + \dfrac{n}{T_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$: $\dfrac{27}{6} = 4 + \dfrac{3}{6}$.

$\boxed{58}$ $\dfrac{T_{2k-1}}{2k-1} = k$; $\dfrac{T_{2k}}{2k+1} = k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $k = 19$: $\dfrac{T_{37}}{37} = \dfrac{703}{37} = 19$; $\dfrac{T_{38}}{39} = \dfrac{741}{39} = 19$.

$\boxed{59}$ **Números triangulares e PA com $n$ termos, razão $n$, $a_1 = T_n$, soma $= n^3$, termo central igual a $n^2$, $n$ ímpar**

**Ex:** $n = 13$, $T_{13} = 91$: $91 + 104 + 117 + 130 + 143 + 156 + \boxed{169} + 182 + 195 + 208 + 221 + 234 + 247 = 2197 = 13^3$.

$\boxed{60}$ $[T_{2n-1} + T_{2n+1}]^{-1} \pmod{T_{2n} + T_{2(n+1)}} = n + 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$: $(T_5 + T_7)^{-1} \pmod{T_6 + T_8}$; $(43)^{-1} \pmod{57} = 4 \cdot 43 \equiv 1 \pmod{57}$; $172 \equiv 1 \pmod{57}$.

$\boxed{61}$ **8 divide** $T_{(n+1)} \cdot T_{(n+2)} - T_n \cdot T_{(n+3)}$

$n$ ímpar: $\dfrac{T_{(n+1)} \cdot T_{(n+2)} - T_n \cdot T_{(n+3)}}{8} = T_{(n+1)/2}$

**Ex:** $n = 21$: $\dfrac{T_{22} \times T_{23} - T_{21} \times T_{24}}{8} = T_{11}$;

$$\frac{253 \times 276 - 231 \times 300}{8} = \frac{588}{8} = 66 = T_{11}.$$

$\boxed{62}$ $(T_n + T_{n+2})(T_{n+1}) = T_{(n+1)(n+2)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$: $(T_6 + T_8) \cdot T_7 = T_{7\times 8}$; $(21 + 36) \cdot 28 = T_{56}$; $1596 = T_{56}$.

$\boxed{63}$ **Se $n$ é par, $T_n + T_{n+1} \equiv 1 \pmod{4}$; se $n$ é ímpar, $T_n + T_{n+1} \equiv 0 \pmod{4}$**

**Ex:** $n = 7$: $T_7 + T_8 = 28 + 36 = 64 \equiv 0 \pmod{4}$.
**Ex:** $n = 12$: $T_{12} + T_{13} = 78 + 91 = 169 \equiv 1 \pmod{4}$.

$\boxed{64}$ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{T_{(n+1)}}{T_n} = 1$

**Ex:** $n = 1000$: $\dfrac{T_{1001}}{T_{1000}} = \dfrac{501501}{500500} \approx 1{,}002$.

$\boxed{65}$ $\left(\dfrac{n+1}{2}\right) T_{2n} - T_n = n^3 + n^2$**,** $n$ **ímpar;** $\dfrac{n}{2} \cdot T_{2n+1} - T_n = n^3 + n^2$**,** $n$ **par**

**Ex:** $n = 5$: $3 \cdot T_{10} - T_5 = 5^3 + 5^2$; $3 \cdot 55 - 15 = 125 + 25 = 150$.
**Ex:** $n = 14$: $7 \cdot T_{29} - T_{14} = 14^3 + 14^2$; $7 \cdot 435 - 105 = 2744 + 196 = 2940$.

$\boxed{66}$ **Números triangulares quadrados perfeitos $TQ(n)$. Para $n = 1$: $T_1 = 1$. Para $n = 8$: $T_8 = 36$. Para $n > 2$, por recorrência:**

$$TQ(n) = \left[TQ\left(\tfrac{n+1}{2}\right) - TQ\left(\tfrac{n-1}{2}\right)\right]^2, \quad n \text{ ímpar}$$

$$TQ(n) = \frac{\left[TQ\left(\tfrac{n+2}{2}\right) - TQ\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\right]^2}{TQ(2)}, \quad n \text{ par}$$

$$TQ(3) = (36-1)^2 = 35^2 = 1225 = T_{49}$$

$$TQ(4) = \frac{(1225-1)^2}{36} = 41616 = T_{288}$$

Participação: Ricardo Silva. Website: `www.osfantasticosnumerosprimos.com.br`

$\boxed{67}$ **Somas parciais de números triangulares consecutivos. $T_m$: primeiro termo da soma; $k$: número de termos a serem somados**

$$S(k,\, T_m) = \frac{1}{6}\left[3km^2 + 3km + (k-1)^3 + 3(k-1)^2 + 2(k-1)\right]$$

**Ex:** $k = 6$, $m = 11$, $T_{11} = 66$:

$$S(6,\, T_{11}) = 66 + 78 + 91 + 105 + 120 + 136 =$$

$$\frac{1}{6}(3 \times 6 \times 121 + 3 \times 36 \times 11 + 125 + 75 + 10) = \frac{1}{6}(3596) = 596.$$

$\boxed{68}$ **Números triangulares e ternos pitagóricos**

$$(2m-1)^2 + \left[4\,T_{(m-1)}\right]^2 = \left[4\,T_{(m-1)} + 1\right]^2 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

**Ex:** $m = 13$: $25^2 + (4 \times 78)^2 = (4 \times 78 + 1)^2$;

$$25^2 + 312^2 = 313^2.$$

$\boxed{69}$ $T_m + T_{m+2} = (T_{m+1}+1)^2 - (T_{m+1})^2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$

**Ex:** $m=5$: $T_5 + T_7 = (T_6+1)^2 - T_6^2$;

$$15 + 28 = 22^2 - 21^2 = 43.$$

$\boxed{70}$ **A soma dos naturais entre dois triangulares consecutivos é dada por** $\dfrac{1}{2}(m^3 + 2m^2 + m)$

**Ex:** $m=8$; $T_8 = 36$; $T_9 = 45$. Soma $= 37+38+39+40+41+42+43+44$

$$= \frac{1}{2}(8^3 + 2\cdot 8^2 + 8) = 324.$$

$\boxed{71}$ **Se $T(n)$ é um número triangular, $9T(n)+1$ também é um número triangular**

**Ex:** $n=18$; $T_{18} = 171$; $171 \times 9 + 1 = 1540 = T_{55}$.

$\boxed{72}$ $T_a \cdot T_b$ **é um quadrado perfeito para** $b = (2a+1)^2 - 1$

**Ex:** $a=7$, $b = 15^2 - 1 = 224$; $T_7 \cdot T_{224} = 28 \times 25200 = 705600 = 840^2$.
Por Steve Homewood. Website: `www.shyamsundergupta.com`.

$\boxed{73}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2(1-0) = 2$

$\boxed{74}$ **Números triangulares quadrados perfeitos — fórmula fechada**

$$TQ(n) = \left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

**Ex:** $TQ(3) = \left(\dfrac{(3+2\sqrt{2})^3 - (3-2\sqrt{2})^3}{4\sqrt{2}}\right)^2 = 35^2 = 1225.$

$\boxed{75}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{4\cdot T_n^3 - T_n^2}{3} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n=6$: $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 = \dfrac{4T_6^3 - T_6^2}{3}$

$$= 1 + 32 + 243 + 1024 + 3125 + 7776 = \frac{4\times 9261 - 441}{3} = \frac{36603}{3} = 12201.$$

$\boxed{76}$ **$T_n \,]\, T_{n+1}$; $]$ sinal de concatenação para $\forall\, T(n)$ dado pelas somas consecutivas em $l_n$**

$$\begin{array}{llllll} l_1 = 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & \quad l_n = 5 \times l_{n-1} \\ l_2 = 5 & 15 & 10 & 30 & 20 & \\ l_3 = 25 & 75 & 50 & 150 & 100 & \\ \quad\vdots & & & & & \end{array}$$

Portanto, a propriedade vale para $T(2)$: $2{+}1 = T(3)$; $3{+}3 = T(6)$; $6{+}2 = T(8)$; $8{+}6 = T(14)$; $14{+}4 = T(18)$; $18{+}5 = T(23)$; $23{+}15 = T(38)$; ...

**Ex:** $T_{(23)} \,]\, T_{(24)}$; $T_{24}$ divide $T_{23} \,]\, T_{24}$.

$T_{23} = 276$; $T_{24} = 300$; $300 \mid 276300$; $\dfrac{276300}{300} = 921$

$\boxed{77}$ **$T_{\left[\frac{k+2n-1}{2}\right]} = \dfrac{1}{2}\left[T(n) + T(n+k-1) - \left(\dfrac{k-1}{2}\right)^2\right] \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$, $k$ ímpar**

**Ex:** $n = 13$, $k = 7$:

$$T_{16} = \frac{1}{2}\left(T_{13} + T_{19} - 9\right) = \frac{1}{2}(91 + 190 - 9) = \frac{1}{2}(272) = 136$$

$\boxed{78}$ $\det\begin{pmatrix} T_{(n+4)} & T_{(n+3)} \\ T_{(n+1)} & T_{(n+2)} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} T_{(n+3)} & T_{(n+2)} \\ T_n & T_{(n+1)} \end{pmatrix} = 6\,T_{(n+2)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 13$:

$$\det\begin{pmatrix} T_{17} & T_{16} \\ T_{14} & T_{15} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} T_{16} & T_{15} \\ T_{13} & T_{14} \end{pmatrix} = 6 \cdot T_{15}$$

$$\det\begin{pmatrix} 153 & 136 \\ 105 & 120 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 136 & 120 \\ 91 & 105 \end{pmatrix} = 4080 - 3360 = 720 = 6 \times 120$$

$\boxed{79}$ $(T_n + T_{n+1})(T_{n+1} - T_n) = (n+1)^3 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 16$:

$$(T_{16} + T_{17})(T_{17} - T_{16}) = 17^3; \quad (136 + 153)(153 - 136) = 289 \times 17 = 4913 = 17^3$$

$\boxed{80}$ $T_{(n)} + T_{(n+2)} = \left[T_{(n+1)} + 1\right]^2 - \left(T_{(n+1)}\right)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$:

$$T_6 + T_8 = (T_7 + 1)^2 - T_7^2; \quad 21 + 36 = 29^2 - 28^2 = 841 - 784 = 57$$

$\boxed{81}$ $T_{(2n-1)} = n(2n-1)$**;** $\quad T_{(2n)} = n(2n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 17$:

$$T_{33} = 17 \times 33 = 561; \quad T_{34} = 17 \times 35 = 595$$

$\boxed{82}$ $T_n^3 - T_n^2 = \dfrac{1}{8}\left[n^2(n+1)^2(n-1)(n+2)\right] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 7$:

$$T_7^3 - T_7^2 = \frac{1}{8}\left[7^2 \cdot 8^2 \cdot 6 \cdot 9\right] = \frac{1}{8}(169344) = 21168 = 21952 - 784$$

$\boxed{83}$ $(n+2)$ **divide** $T_n^3 - T_n^2$**,** $n$ **ímpar**

**Ex:** $n = 11$: 13 divide $T_{11}^3 - T_{11}^2$:

$$\frac{66^3 - 66^2}{13} = \frac{287496 - 4356}{13} = \frac{283140}{13} = 21780$$

$\boxed{84}$ $T_n \times T_{n-1} = \left(\dfrac{n^2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{n}{2}\right)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 23$:

$$T_{23} \times T_{22} = \left(\frac{529}{2}\right)^2 - \left(\frac{23}{2}\right)^2; \quad 276 \times 253 = 69828$$

$\boxed{85}$ $L_n = F_{n-2} \times T_1 + F_{n-1} \times T_2 \quad L$**: sequência de Lucas;** $F$**: sequência de Fibonacci;** $T_1 = 1$**,** $T_2 = 3 \quad \forall\, n \geq 3$

**Ex:** $n = 9$:

$$L_9 = F_7 \times T_1 + F_8 \times T_2 = 13 \times 1 + 21 \times 3 = 13 + 63 = 76$$

$\boxed{86}$ $L_n = F_{n-5}(F_1 + T_3) + F_{n-4}(F_2 + T_4) \quad \forall\, n \geq 6$

$L$: sequência de Lucas; $F$: sequência de Fibonacci.

**Ex:** $n = 14$:

$$L_{14} = F_9(F_1 + T_3) + F_{10}(F_2 + T_4) = 34(1+6) + 55(1+10) = 238 + 605 = 843$$

$\boxed{87}$ $2T_{3n+1} + (3n+1)^2 = T_{6n+2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$:

$$2T_{10} + 10^2 = T_{20}; \quad 2 \times 55 + 100 = 210 = 110 + 100$$

$\boxed{88}$ $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\, i^2 = T_n \qquad n$ **ímpar**

**Ex:** $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^{5}(-1)^{i-1}\, i^2 = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 = T_5 = 15$$

$\boxed{89}$ $T_{2n-1} + T_{2n} = 4n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 8$: $T_{15} + T_{16} = 4 \cdot 8^2$; $120 + 136 = 4 \cdot 64 = 256$

$\boxed{90}$ $\dfrac{T_n^2}{n^2} = \left(\dfrac{1}{2}n^3 + \dfrac{1}{2}n\right)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$:

$$\frac{T_9^2}{9} = \left(\frac{1}{2}\cdot 27 + \frac{3}{2}\right)^2; \quad \frac{2025}{9} = 225 = 15^2$$

$\boxed{91}$ **A soma dos naturais consecutivos com $n$ parcelas é uma PA com $a_1 = T_n$ e razão $R = n^2$**

**Ex:** $n = 6$, $R = 36$, $a_1 = T_6 = 21$. PA: $(21, 57, 93, \ldots)$
$a_1 = 21$: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
$a_2 = 57$: $a_1 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$
$a_3 = 93$: $a_1 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 93$

$\boxed{92}$ **Números triangulares por recorrência: $T_n = T_{n-1} + n$; $\qquad T_1 = 1$**

**Ex:** $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$; $T_3 = T_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

$\boxed{93}$ $T_n^3 - 3T_n^2(T_{n-1}) + 3T_n(T_{n-1})^2 + T_{(n-1)}^3 = T_n^2 - T_{n-1}^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 4$:

$$T_4^3 - 3T_4^2 \cdot T_3 + 3T_4T_3^2 + T_3^3 = T_4^2 - T_3^2$$

$$10^3 - 3 \cdot 10^2 \cdot 6 + 3 \cdot 10 \cdot 6^2 - 6^3 = 10^2 - 6^2$$

$$1000 - 1800 + 1080 - 216 = 100 - 36 = 64$$

$\boxed{94}$ $T_n + T_n\left[\dfrac{1}{2}(n-1)^2 + \dfrac{3}{2}(n-1)\right] = T_n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 9$:

$$T_9 + T_9(32 + 12) = T_9^2; \quad 45 + 45 \times 44 = 45^2 = 2025$$

$\boxed{95}$ $T_n + T_{n+1} \equiv 1 \pmod 4$, $n$ **par;** $\quad T_n + T_{n+1} \equiv 0 \pmod 4$, $n$ **ímpar**

**Ex:** $n = 4$: $T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25 \equiv 1 \pmod 4$
**Ex:** $n = 7$: $T_7 + T_8 = 28 + 36 = 64 \equiv 0 \pmod 4$

$\boxed{96}$ **O maior fator primo da diferença entre dois números triangulares consecutivos é fator primo de $T(n)$ e $T(n+1)$. Portanto, dois números triangulares consecutivos jamais serão coprimos. Isto está em oposição ao fato de seus índices (dois naturais consecutivos) serem sempre coprimos.**

**Ex:** $n = 7$, $n + 1 = 8$:
$T_7 = 28 = 2^2 \times 7$; $T_8 = 36 = 2^2 \times 3^2$
$T_8 - T_7 = 36 - 28 = 8 = 2^3$
$\mathrm{mdc}(7, 8) = 1$ (coprimos); $\mathrm{mdc}(28, 36) = 4$ (não coprimos)

$\boxed{97}$ $T_{(4n-1)k} \equiv 0 \pmod{4n-1} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$, $k = 13$: $T_{299} \equiv 0 \pmod{23}$

$$T_{299} = 44850; \quad \frac{44850}{23} = 1950$$

$\boxed{98}$ $T_{(4n)} = 4n + T_{(4n-1)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 2$: $T_8 = 8 + T_7$; $36 = 8 + 28$
**Ex:** $n = 7$: $T_{28} = 28 + T_{27}$; $406 = 28 + 378$

$\boxed{99}$ $2n^k \cdot T(n) = n^{k+1} + n^{k+2} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$, $k = 6$:

$$2 \cdot 3^6 \cdot T_3 = 3^7 + 3^8; \quad 1458 \times 6 = 2187 + 6561 = 8748$$

$\boxed{100}$ $4n^k \cdot T_n \cdot T_{(n-1)} = n^{k+4} - n^{k+2} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 7$, $k = 4$:

$$4 \cdot 7^4 \cdot T_7 \cdot T_6 = 7^8 - 7^6; \quad 9604 \times 28 \times 21 = 5764801 - 117649 = 5647152$$

$\boxed{101}$ $n \cdot T_n = \dfrac{n^2 + n^3}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 13$: $13 \cdot T_{13} = \dfrac{13^2 + 13^3}{2}$;

$$13 \times 91 = \frac{169 + 2197}{2} = \frac{2366}{2} = 1183.$$

$\boxed{102}$ **Em um triângulo numérico, a soma parcial do número de elementos por linha é dada por $T_{n+1}$**

$$\sum_{l=0}^{n}(l+1) = 1+2+3+\cdots+(n+1) = T_{n+1}$$

**Ex:** $n=3$: $\displaystyle\sum_{l=0}^{3}(l+1) = 1+2+3+4 = T_4 = 10.$

$\boxed{103}$ **Se $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n \equiv 0 \pmod 3$, então $27 \mid T_n^3$**

**Ex:** $n = 6 \equiv 0 \pmod 3$: $T_6 = 21$; $\dfrac{21^3}{27} = \dfrac{9261}{27} = 343 = 7^3$.

**Ex:** $n = 20 \equiv 2 \pmod 3$: $T_{20} = 210$; $\dfrac{210^3}{27} = \dfrac{9261000}{27} = 343000 = 70^3$.

$\boxed{104}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = T_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n=6$: $1+2+3+4+5+6 = 21 = T_6$.

$\boxed{105}$ $T_n(T_n - 1) = T_{n-1} \cdot T_{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 11$: $T_{11}(T_{11}-1) = T_{10} \times T_{12}$;

$$66 \times 65 = 55 \times 78 = 4290.$$

$\boxed{106}$ $T_n^2 + T_n = 2\,T_{T_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n=7$: $T_7^2 + T_7 = 2\,T_{T_7}$;

$$28^2 + 28 = 2\,T_{28}; \quad 784 + 28 = 2 \times 406 = 812.$$

$\boxed{107}$ $T_{(n-3)} + T_n + 2n - 3 = n^2 \qquad \forall\, n \geq 3$

**Ex:** $n=6$: $T_3 + T_6 + 9 = 36$; $6 + 21 + 9 = 36 = 6^2$.
**Ex:** $n=8$: $T_5 + T_8 + 13 = 64$; $15 + 36 + 13 = 64 = 8^2$.

$\boxed{108}$ $\displaystyle\left(\frac{T_n}{\mathrm{mdc}(T_n,\, T_{n+1})}\right)^{-1} \left(\mathrm{mod}\ \frac{T_{n+1}}{\mathrm{mdc}(T_n,\, T_{n+1})}\right) = \left(\frac{T_{n+1}}{\mathrm{mdc}(T_{n+1},\, T_{n+2})}\right)^{-1} \left(\mathrm{mod}\ \frac{T_{n+2}}{\mathrm{mdc}(T_{n+1},\, T_{n+2})}\right)$

$n$ ímpar; a igualdade dos inversos modulares entre pares consecutivos de triangulares.

**Ex:** $n=7$: $T_7 = 28$, $T_8 = 36$, $T_9 = 45$;
$\mathrm{mdc}(36, 28) = 4$, $\mathrm{mdc}(45, 36) = 9$.

$$7^{-1} \pmod 9 = 4; \qquad 4^{-1} \pmod 5 = 4.$$

**$\boxed{109}$ $T_n+T_{n+1}+T_{n+2}=n'^2$ admite infinitas soluções inteiras, geradas pela recorrência $n_{\textbf{novo}}=5n'+4n+6$**

As soluções $(n,\,n')$ satisfazem $T_n+T_{n+1}+T_{n+2}=n'^2$.

**Ex:** $(n,n')=(5,8)$: $T_5+T_6+T_7=15+21+28=64=8^2$.
**Ex:** $(n,n')=(63,79)$: $T_{63}+T_{64}+T_{65}=2016+2080+2145=6241=79^2$.
**Ex:** $(n,n')=(14,19)$ via $n_{\text{novo}}=5\times 8+4\times 5+6=66$... próxima solução: $(152,188)$.

**$\boxed{110}$ A sequência $d_n=\dfrac{1}{3}T_n\cdot T_{n-1}$ é uma PA de quarta ordem cujas diferenças segundas $\Delta^2$ formam a sequência dos quadrados dos naturais**

$$d_n=1,\ 6,\ 20,\ 50,\ 105,\ \ldots\qquad \Delta^2 d_n=9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots=3^2,\,4^2,\,5^2,\ldots$$

**Ex:** $d_6=\dfrac{T_6\cdot T_5}{3}=\dfrac{21\times 15}{3}=105;\quad d_5=\dfrac{T_5\cdot T_4}{3}=\dfrac{15\times 10}{3}=50.$

**$\boxed{111}$ $(T_{n+1}\times T_{n+2})-(T_n\times T_{n+1})=n^3+\frac{9}{2}n^2+\frac{13}{2}n+3\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$**

**Ex:** $n=3$: $(T_4\times T_5)-(T_3\times T_4)=3^3+\frac{9}{2}\cdot 9+\frac{13}{2}\cdot 3+3$;

$$(10\times 15)-(6\times 10)=27+40{,}5+19{,}5+3=90.$$

**$\boxed{112}$ A sequência $e_n=\dfrac{1}{3}\left(T_{n+1}\cdot T_{n+2}-T_n\cdot T_{n+1}\right)$ tem diferença $\Delta$ formando a sequência dos quadrados dos naturais**

$$e_n=5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ \ldots\qquad \Delta e_n=9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots=3^2,\,4^2,\,5^2,\ldots$$

**$\boxed{113}$ $T_n+T_{n+2}-T_{n+1}=\dfrac{n^2+3n+4}{2}\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$**

**Ex:** $n=6$: $T_6+T_8-T_7=\dfrac{36+18+4}{2}$;

$$21+36-28=\frac{58}{2}=29.$$

**$\boxed{114}$ $\dfrac{T_n\cdot T_{n+2}}{T_{n+1}}=\dfrac{n^2+3n}{2}\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$**

**Ex:** $n=2$: $\dfrac{T_2\cdot T_4}{T_3}=\dfrac{3\times 10}{6}=5=\dfrac{4+6}{2}$.
**Ex:** $n=8$: $\dfrac{T_8\cdot T_{10}}{T_9}=\dfrac{36\times 55}{45}=44=\dfrac{64+24}{2}$.

**$\boxed{115}$ $T_n+T_{n-1}+2n+1=(n+1)^2\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$**

**Ex:** $n=13$: $T_{13}+T_{12}+27=14^2$; $91+78+27=196=14^2$.

$\boxed{116}$ $T_{2n-1} + T_{2n} + n^3 - n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 4$: $T_7 + T_8 + 64 - 16 + 12 + 1 = 5^3$;

$$28 + 36 + 61 = 125 = 5^3.$$

$\boxed{117}$ $\displaystyle\sum_{k=n^2+n-1}^{n^2+2n} T(k) = \sum_{k=n^2+2n+1}^{n^2+3n} T(k) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 3$:

$$T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} = T_{16} + T_{17} + T_{18}$$

$$66 + 78 + 91 + 105 + 120 = 136 + 153 + 171 = 460.$$

$\boxed{118}$ $T_{2n} + T_{2n+1} = (2n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

A soma de dois triangulares consecutivos de índices par e ímpar é sempre um quadrado perfeito ímpar.

**Ex:** $n = 5$: $T_{10} + T_{11} = 11^2$; $55 + 66 = 121 = 11^2$.

$\boxed{119}$ $T_n + 2n + T_{n-1} + 1 = (n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 7$: $T_7 + 14 + T_6 + 1 = 8^2$; $28 + 14 + 21 + 1 = 64 = 8^2$.
**Ex:** $n = 13$: $T_{13} + 26 + T_{12} + 1 = 14^2$; $91 + 26 + 78 + 1 = 196 = 14^2$.

$\boxed{120}$ $T_n + (2n-1) + T_{n-1} + 2 = (n+1)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 17$: $T_{17} + 33 + T_{16} + 2 = 18^2$; $153 + 33 + 136 + 2 = 324 = 18^2$.

$\boxed{121}$ $(3\,T_n + 1)(n+1) \equiv 1 \pmod{3\,T_{n+1} + 1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Ex:** $n = 6$: $(3\,T_{12} + 1)(7) \equiv 1 \pmod{3\,T_{13} + 1}$;

$$235 \times 7 = 1645 \equiv 1 \pmod{274}; \quad \frac{1645 - 1}{274} = 6. \quad \checkmark$$

$\boxed{122}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{6}\, n(n+1)(n+2) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

A soma dos primeiros $n$ números triangulares é o número tetraédrico de ordem $n$.

**Ex:** $n = 7$: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = \dfrac{7 \times 8 \times 9}{6} = 84$.

**Ex:** $n = 9$: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 = \dfrac{9 \times 10 \times 11}{6} = 165$.

$\boxed{123}$ $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} T_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$ $\quad n-k+1$ **termos**

**Ex:** $k=6$, $n=13$, 8 termos:

$$T_6 + T_7 + \cdots + T_{13} = \frac{13 \times 14 \times 15}{6} - \frac{5 \times 6 \times 7}{6} = 455 - 35 = 420.$$

$\boxed{124}$ $(2k+1)^{2j} \equiv 1 \pmod 8 \quad \forall\, k, j \in \mathbb{N}$**, e** $\dfrac{(2k+1)^{2j}-1}{8}$ **é sempre um número triangular**

**Ex:** $k=6$, $j=2$: $13^4 = 28561$; $28561 \equiv 1 \pmod 8$; $\dfrac{28561-1}{8} = 3570 = T_{84}$.

$\boxed{125}$ $2\,T_{(n-4)} + 7(n-2) = (2n-1)^3 - (2n+1)^3 + (5n)^2 \quad \forall\, n \geq 5$

**Ex:** $n=6$: $2\,T_2 + 7 \times 4 = 11^3 - 13^3 + 30^2$;

$$6 + 28 = -866 + 900 = 34. \quad \checkmark$$

**Ex:** $n=7$: $2\,T_3 + 7 \times 5 = 13^3 - 15^3 + 35^2$;

$$12 + 35 = -866 + \cdots\ ; \quad 47 = 2197 - 3375 + 1225 = 47. \quad \checkmark$$