Paraná

Data: 27/05/2025

Autor: Fernando Cézar Gonçalves Manso

Universidade Federal do Paraná - CM

Título: 001 - Primalidade de n = 2k+1 pela razão $\frac{(2k)!}{T(2k)}$

Seja $T(2k)$ um número triangular definido por $T(2k) = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$; Seja $(2k)!$, o fatorial de $(2k)$ dado por $(2k)! = (2k).(2k-1).(2k-2)\ldots.k\ldots 3.2.1$. A razão $\frac{(2k)!}{T(2k)}$ resultará numa divisão exata se e somente se $(2k+1)$ for um número composto. Isso mostra via $\frac{(2k)!}{T(2k)}$ a primalidade de $(2k+1)$. Podemos ainda mostrar que se $(2k+1)$ é primo, a razão $\frac{(2k)!}{T(2k)}$ resultará em uma fração mista, com fração própria igual a $\frac{2}{2k+1}$.

Vejamos dois exemplos que ilustram o que foi exposto até aqui: Exemplo 1: Seja $9 = 2.4 + 1$. Queremos mostrar que, como 9 é um número composto, a razão$\frac{(2k)!}{T(2k)}$é um número inteiro, ou seja, a divisão de $(2k)!\, por\, T(2k)$ é exata. Então temos, $2k = 2.4 = 8; T(8) = \frac{8.9}{2} = 4.9 = 36; (2.4)! = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320.\, fazendo\ \frac{40320}{36}\ obtemos\ o\ quociente\ inteiro\ 1120$, portanto, a divisão é exata e daí segue que $9 = 2.4 + 1$ é um número composto; Exemplo 2: Seja $7 = 2.3 + 1$. Queremos mostrar que, como 7 é um número primo, a razão $\frac{(2k)!}{T(2k)}$ resulta em uma fração mista com fração própria igual a $\frac{2}{7}$. Então temos, $2k = 2.3 = 6; T(6) = \frac{6.7}{2} = 3.7 = 21; (2.3)! = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720; fazendo\ \frac{720}{21} = 34\frac{2}{7}\ ou\ seja\ 34 + \frac{2}{7}$.
Portanto, a divisão não é exata e daí segue que $7 = 2.3 + 1$ é um número primo. Isso pode ser aplicado a qualquer n da forma 2k+1 ou seja, testa a primalidade de qualquer número ímpar.

Apesar de, teoricamente ser bastante interessante o fato de conectar fatorial, números triangulares e primalidade, temos aqui uma limitação computacional para aplicar esse algoritmo como um teste determinístico eficiente de primalidade, isto porque um número fatorial tem taxa de crescimento extremamente rápido, o que, para fins práticos, inviabiliza todo o processo.

A prova formal de que a razão$\frac{(2k)!}{T(2k)}$ $testa\ a\ primalidade\ de\ 2k+1$, está no fato de que se $2k+1$ é $primo, 2k+1\ não$ é $fator\ de\ (2k)!$ Como $T(2k) = k.(2k+1)$, a divisão não é exata. Observe que $2k+1$ é $maior\ que\ 2k$ e, sendo primo, não pode ser decomposto em fatores primos que sejam fatores de $(2k)$!, o que acontece se $2k+1$ é composto.

Desde que o leitor consiga calcular o fatorial, pode testar o algoritmo para outros números ímpares. Lembre-se que o único número primo par é o 2 e, portanto, não faz sentido testar a primalidade para números pares.

Um fato curioso é que quanto maior for o primo a ser testado, mais próximo de um quociente inteiro estará a razão$\frac{(2k)!}{T(2k)}$, uma vez que o resíduo é $\frac{2}{2k+1}$ e, a medida que $2k+1$ cresce, esse resíduo se aproxima de zero.

Por tudo que foi exposto, vale ressaltar que o algoritmo é particularmente interessante do ponto de vista teórico por relacionar fatorial, primalidade e números triangulares e que omesmo constitui um teste de primalidade determinístico, ou seja, em 100% dos casos a primalidade é precisamente determinada. O fato de não ser computacionalmente viável em função de lidar com fatoriais não invalida as belas conexões aqui expostas. A matemática é sempre bela e surpreendente.